

Υποθήφεις ερωτήσεις προφορικών εξετάσεων,  
«Μιγαδικές Συναρτήσεις Ι», Ολομορφία Μιγαδικών  
Συναρτήσεων  
*Δήμογλου Κωνσταντίνος*

## ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

**Στοιχειοθεσία Θεμάτων:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc).

**Ερώτηση 1.** Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι είναι μιγαδικά διαφορίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Πότε λέμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση είναι ολόμορφη σε ένα ανοιχτό σύνολο; Πότε λέμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση είναι ακέραια;

**Ερώτηση 2.** Πότε μια μιγαδική συνάρτηση λέγεται  $\mathbb{C}$ -γραμμική και ποιό το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο μιας τέτοιας συνάρτησης; Μια τέτοια συνάρτηση είναι μιγαδικά διαφορίσιμη; Αν ναι, τότε ποια η μιγαδική παράγωγος αυτής;

**Ερώτηση 3.** Αν για μία μιγαδική συνάρτηση  $f$  το αντίστοιχο διανυσματικό πεδίο της είναι διαφορίσιμο, τότε η  $f$  είναι μιγαδικά διαφορίσιμη; Αν όχι, αιτιολογήστε το. Επίσης, μήπως ισχύει το παραπάνω αντίστροφα; Διατυπώστε το Θεώρημα Χαρακτηρισμού των μιγαδικά διαφορίσιμων συναρτήσεων των Cauchy-Riemann. Υπό το θεώρημα τούτο αν υπάρχει η μιγαδική παράγωγος μιας μιγαδικής συνάρτησης  $f$  τότε ποιος ο τύπος της;

**Ερώτηση 4.** Ποια η διαδικασία που θα κάνατε για να εξετάσετε για ποιους μιγαδικούς αριθμούς οι συναρτήσεις  $z \mapsto \bar{z}$  και  $z \mapsto |z|^2$  είναι μιγαδικά διαφορίσιμες;

**Ερώτηση 5.**

Πότε μπορεί η μη μιγαδική διαφορισιμότητα μιας συνάρτησης να εγγυηθεί τη μη διαφορισιμότητα του αντίστοιχου διανυσματικού πεδίου της;

**Ερώτηση 6.** Ποιες είναι οι  $\mathbb{R}$ -γραμμικές μιγαδικές συναρτήσεις; Ποια η σχέση των  $\mathbb{R}$ -γραμμικών και  $\mathbb{C}$ -γραμμικών μιγαδικών συναρτήσεων; Ποιες μιγαδικές συναρτήσεις από την κλάση των  $\mathbb{R}$ -γραμμικών είναι μιγαδικά διαφορίσιμες;

**Ερώτηση 7.** Πότε λέμε ότι μια μιγαδική συνάρτηση  $f$  είναι  $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Ποιο το  $\mathbb{R}$ -διαφορικό (ή η  $\mathbb{R}$ -παράγωγος) της  $f$ ;

**Ερώτηση 8.** Πότε μια μιγαδική συνάρτηση  $f$  λέμε ότι είναι μερικώς διαφορίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της; Ποιες οι μερικές παράγωγοι της  $f$  και πότε ονομάζουμε την  $f$  συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη (ή συνεχώς  $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη); Υπάρχουν πάντα οι μερικές παράγωγοι μιας μιγαδικής συνάρτησης  $f$ ; Αν όχι, έχετε κάποια συνάρτηση ως αντιπαράδειγμα; Αν  $f$  συνεχώς μερικώς διαφορίσιμη, τότε  $f$  είναι και  $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη; Αν η  $f$  είναι  $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη, υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι; Αν ναι, τότε ποια η έκφραση της  $\mathbb{R}$ -παραγώγου ως συνάρτηση των μερικών παραγώγων της  $f$ ; Περιγράψτε τις εξισώσεις των Cauchy-Riemann με τη βοήθεια των μερικών παραγώγων της  $f$ .

**Ερώτηση 9.** Αν μια μιγαδική συνάρτηση  $f$  είναι μιγαδικά διαφορίσιμη είναι και  $\mathbb{R}$ -διαφορίσιμη; Επίσης, το αντίστροφο ισχύει; Ποια η σχέση της  $\mathbb{R}$ -διαφορισιμότητας με τη μιγαδική διαφορισιμότητα; Πότε αυτές οι δύο έννοιες ταυτίζονται (κατά συνέπεια η  $\mathbb{R}$ -παράγωγος και η μιγαδική παράγωγος ταυτίζονται);

**Ερώτηση 10.** Περιγράψτε (ισοδύναμα) το θεώρημα των Cauchy-Reimann με χρήση του διαφορικού τελεστή  $\partial$  και εκφράστε την μιγαδική παράγωγο μιας συνάρτησης  $f$  σε ένα τυχαίο σημείο του πεδίου ορισμού της (όταν αυτή υπάρχει) με τη βοήθεια του διαφορικού τελεστή  $\partial$ .

**Ερώτηση 11.** Πότε μια μιγαδική συνάρτηση  $f$  τη λέμε αντιολόμορφη; Ποιες σχέσεις γνωρίζετε μεταξύ ολόμορφων και αντιολόμορφων συναρτήσεων; Υπάρχει παράδειγμα μιγαδικής συνάρτησης  $f$  η οποία να είναι:

- (a) ολόμορφη και αντιολόμορφη;
- (b) ολόμορφη και όχι αντιολόμορφη;
- (c) αντιολόμορφη και όχι ολόμορφη;
- (d) ούτε ολόμορφη και ούτε αντιολόμορφη;

**Ερώτηση 12.** Σωστό ή Λάθος;

- Αν μία μιγαδική συνάρτηση  $f$  ορισμένη και ολόμορφη σε ένα ανοιχτό σύνολο  $D$  έχει μιγαδική παράγωγο ίση με μηδέν στο  $D$ , τότε η συνάρτηση  $f$  είναι σταθερή.
- Αν μία συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα ανοιχτό σύνολο  $D$  ικανοποιεί τις εξισώσεις Cauchy-Riemann, τότε και η  $f^2$  τις ικανοποιεί.
- Η συνάρτηση  $f(z) = z\bar{z} - z^2$  είναι ακέραια.

